Resumen de Discretas 2

Elaborado por Christian Alexander Oliveros Labrador, Cohorte 13. Ing. Computación.

Actualizada: 08 de abril de 2016. El orden de los temas es basado en el cronograma del curso Abril-Julio 2015 (Enero-Marzo si no se cuenta el retraso).

Agradecimientos a César Silva por correcciones de errores.

Página web: oliveroschristian.wordpress.com

Índice

Primer Parcial

Conjuntos

Axioma del Conjunto Vacío: $\exists C(\forall x(x \notin C))$ (Se representa al vacío con ϕ)

Axioma de Extensión: $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Longrightarrow A = B$

Igualdad de Conjuntos: $A = B \Longrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Proposición: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Axioma de Separación: $\forall A\left(\forall P\left(\exists B\left(\forall x\left(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)\right)\right)\right)\right)$ (P(x) es una propiedad que revisa si x la cumple)

Conjunto Intersección: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Conjunto Diferencia: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Conjunto Unión: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Subconjunto: $A \subseteq B \Longrightarrow \forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$

Propiedades:

- $\phi \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- $A \cap B \subseteq A \wedge A \cap B \subseteq B$
- $A - B \subseteq A$
- Transitividad: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- Doble Contención: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Subconjunto Propio: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$
- $A \subset B \Longrightarrow B \not\subset A$
- $A \not\subset A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A = B$

Axioma de Apareamiento: $\forall A, B\left(\exists C(\forall x(x \in C \Leftrightarrow x = A \vee x = B))\right)$
(Básicamente $C = \{A, B\}$)

Axioma de Unión: $\forall x(x \in \bigcup A \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y))$

Definición: $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$

Unión: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Propiedades:

- $\phi \cup A = A$
- $A \subseteq A \cup B$

- $B \subseteq A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \cup B \subseteq C$
- $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cup C$

Intersección: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Propiedades:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \phi = \phi$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Diferencia: $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Propiedades:

- $\phi - A = \phi$
- $A - A = \phi$
- $A - (A \cap B) = A - B$
- $A - \phi = A$
- $A \cap (B - A) = \phi$
- $A \cup (B - A) = A \cup B$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Complemento: $A^c = U - A$ (U representa el universo que contiene a A, no existe el Conjunto de Todos los Conjuntos)

Propiedades:

- $\phi^c = U$
- $U^c = \phi$
- $A^{c^c} = A$
- $A^c \cap A = \phi$
- $A \cup A^c = U$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B^c = \phi$
- $A \subseteq B \Longrightarrow B^c \subseteq A^c$ (A y B tienen que estar en el mismo Universo)

Definición Alterna de Intersección: $\forall x\big(x \in \bigcap A \Leftrightarrow \exists B(B \in A) \wedge \forall W(W \in A \Longrightarrow x \in W)\big)$

Propiedades:

- $\bigcap \phi = \phi$
- $\bigcap \{A\} = A$

- $\bigcap\{A, B\} = A \cap B$
- $A \subseteq B \wedge \exists c(c \in A) \Longrightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A$

Definición: Sea I un conjunto de Índices no vacío: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{A_i : i \in I\}$

Familia: $F\ es\ familia \Leftrightarrow \forall x(x \in F \Longrightarrow x\ es\ un\ conjunto)$

Propiedades:

- $\phi\ es\ una\ Familia$
- $F \neq \phi \wedge F_1 \neq \phi \wedge F \cap F_1 \neq \phi \Longrightarrow (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1) \subseteq \bigcap(F \cap F_1)$

Axioma del Conjunto Potencia (de Partes): $\exists C\big(\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \subseteq A)\big)$(Se denota por $\rho(A)$)

Propiedades:

- $A \in \rho(A)$
- $\phi \in \rho(A)$
- $\bigcup \rho(A) = A$
- $\bigcap \rho(A) = \phi$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \rho(A) \subseteq \rho(B)$
- $X \in \rho(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$
- $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$
- $\rho(A \cap B) = \rho(A) \cap \rho(B)$

Axioma de Fundamentación: $A \neq \phi \Longrightarrow \exists x\big(x \in A \wedge \forall y(y \in x \Longrightarrow y \notin A)\big)$

Relaciones

Par Ordenado: $(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$

Propiedad:

- $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ (Igualdad de pares ordenados)

Producto Cartesiano: $AxB = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Propiedades:

- $AxB = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$
- $AxB = BxA \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi \vee A = B$
- $Ax(B \cup C) = (AxB) \cup (AxC)$
- $Ax(B \cap C) = (AxB) \cap (AxC)$
- $Ax(B - C) = (AxB) - (AxC)$
- $B \subseteq C \Longrightarrow AxB \subseteq AxC$
- $A \neq \phi \wedge AxB \subseteq AxC \Longrightarrow B \subseteq C$
- $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \Longrightarrow \bigcup\bigcup(AxB) = A \cup B$

Relación Binaria: $R\ es\ Relación\ Binaria \Leftrightarrow \forall x(x \in R \Leftrightarrow x\ es\ un\ par\ ordenado)$

Propiedades:

- $\phi\ es\ una\ relación\ binaria$
- $AxB\ es\ una\ relación\ binaria$

Dominio y Recorrido de una Relación:

$D(R) = \{x : \exists y((x,y) \in R)\}$ (Dominio)

$R(R) = \{y : \exists x((x,y) \in R)\}$ (Recorrido)

Propiedades:

- $D(R \cup S) = D(R) \cup D(S)$
- $D(R \cap S) \subseteq D(R) \cap D(S)$
- $D(R) - D(S) \subseteq D(R - S)$

Conversa de una Relación: $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$

Propiedades:

- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

Restricción Izquierda y Derecha:

- $R|(C)_{Izq} = \{(x,y) : (x,y) \in R \wedge x \in C\}$
- $R|(C)_{Der} = \{(x,y) : (x,y) \in R \wedge y \in C\}$

Propiedades: (Aplican para ambas)

- $R\big|(C \cup C')_{Izq} = R\big|(C)_{Izq} \cup R|(C')_{Izq}$
- $R\big|(C \cap C')_{Izq} = R\big|(C)_{Izq} \cap R|(C')_{Izq}$
- $R\big|(C - C')_{Izq} = R\big|(C)_{Izq} - R|(C')_{Izq}$

Producto o Secuencia de una Relación: $R.S = \{(x,y) : \exists z((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S)\}$

Propiedades:

- $R.(S.H) = (R.S).H$
- $R.(S \cup H) = R.S \cup R.H$
- $R.(S \cap H) \subseteq (R.S) \cap (R.H)$
- $S \subseteq H \Longrightarrow R.S \subseteq R.H$

Grafo: Sean A, V conjuntos y $A \subseteq VxV$. Entonces (V, A) es un grafo.

Relación Identidad: $I_A = \{(x,x) : x \in A\}$

Tipos de Relaciones: $Para\ R \subseteq AxA$

- $R\ es\ reflexiva\ en\ A \Leftrightarrow \forall x \in A((x,x) \in A) \Leftrightarrow I_A \subseteq R$
- $R\ es\ irreflexiva\ en\ A \Leftrightarrow \forall x \in A((x,x) \notin A) \Leftrightarrow I_A \cap R = \phi$
- $R\ es\ simétrica\ en\ A \Leftrightarrow \forall x,y \in A((x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R) \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$
- $R\ es\ transitiva\ en \Leftrightarrow \forall x,y,z \in A((x,z) \in R \wedge (z,y) \in R \Longrightarrow (x,y) \in R)$
- $R\ es\ asimétrica\ en\ A \Leftrightarrow \forall x,y \in A((x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \notin R) \Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \phi$
- $R\ es\ antisimétrica\ en\ A \Leftrightarrow \forall x,y \in A((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y)$
- $R \subseteq AxA \Longrightarrow R\ es\ una\ relación\ sobre\ A$

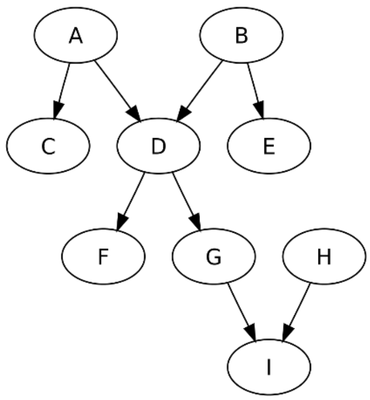
Segundo Parcial

Orden Parcial

Definición: Sea R una relación sobre A: $R\ es\ un\ orden\ parcial\ en\ A \Leftrightarrow R\ es\ reflexiva, antisimétrica\ y\ transitiva\ en\ A.$

Ejemplo:

Diagrama de Hasse



Notación: Al par ordenado (A, R) se le denomina Conjunto Parcialmente Ordenado (CPO).

Sucesor y Predecesor: Sean $x, y \in A$

$$y\ es\ sucesor\ de\ x \Leftrightarrow (x, y) \in R \Leftrightarrow x\ es\ predecesor\ de\ y$$

Sucesor y Predecesor Inmediato: Sean $x, y \in A \wedge x \neq y$

$$x\ es\ predecesor\ inmediato\ de\ y \Leftrightarrow x\ es\ predecesor\ de\ y \wedge \forall z \in A\big((x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \Longrightarrow z = x \vee z = y\big)$$

$$y\ es\ sucesor\ inmediato\ de\ x \Leftrightarrow y\ es\ sucesor\ de\ x \wedge \forall z \in A((x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \Longrightarrow z = x \vee z = y)$$

Maximal: Sea (A, R) un CPO y $B \subseteq A$.

$$x\ es\ maximal\ de\ B \Leftrightarrow x \in B \wedge \forall z \in B\big((x, z) \in R \Longrightarrow z = x\big)$$

Minimal: Sea (A, R) un CPO y $B \subseteq A$.

$$y\ es\ minimal\ de\ B \Leftrightarrow y \in B \wedge \forall z \in B\big((z, y) \in R \Longrightarrow z = y\big)$$

Máximo y Mínimo: Sea (A, R) un CPO y $B \subseteq A$.

$$x\ es\ mínimo\ de\ B \Leftrightarrow x \in B \wedge \forall z \in B\big((x, z) \in R\big) \Leftrightarrow x = min(B)$$

$$y\ es\ máximo\ de\ B \Leftrightarrow y \in B \wedge \forall z \in B\big((z, y) \in R\big) \Leftrightarrow y = max(B)$$

Cota Superior e Inferior: Sea (A, R) un CPO y $B \subseteq A$.

$$x\ es\ cota\ inferior\ de\ B \Leftrightarrow x \in A \wedge \forall z \in B\big((x, z) \in R\big)$$

$$y\ es\ cota\ superior\ de\ B \Leftrightarrow y \in A \wedge \forall z \in B\big((z, y) \in R\big)$$

Notación:

- $Conjunto\ de\ cotas\ superiores\ de\ B = cotsup(B)$
- $Conjunto\ de\ cotas\ inferiores\ de\ B = cotinf(B)$
- $Conjunto\ de\ minimales\ de\ B = Mins(B)$
- $Conjunto\ de\ maximales\ de\ B = Maxs(B)$

Ínfimo y Supremo: Sea (A, R) un CPO y $B \subseteq A$.

$y\ es\ supremo\ de\ B \Leftrightarrow y\ es\ mínimo\ de\ cotsup(B) \Leftrightarrow y = sup(B)$

$x\ es\ ínfimo\ de\ B \Leftrightarrow x\ es\ máximo\ de\ cotinf(B) \Leftrightarrow x = inf(B)$

Proposiciones:

$\forall x, y \in B(x\ es\ mínimo\ de\ B \wedge y\ es\ mínimo\ de\ B \Longrightarrow x = y)$ (Si existe el mínimo, este es único)

$\forall x, y \in B(x\ es\ máximo\ de\ B \wedge y\ es\ máximo\ de\ B \Longrightarrow x = y)$ (Si existe el máximo, este es único)

$x = sup(B) \Longrightarrow x = max(\mathrm{B})$

$x = inf(B) \Longrightarrow x = min(\mathrm{B})$

Orden Total: Sea (A, R) un CPO

$R\ es\ un\ orden\ total\ sobre\ A \Leftrightarrow \forall x, y \in A\big((x, y) \in R \vee (y, x) \in R\big)$

Ejemplo: $A = \{a, b, c, d\}$

Diagrama de Hasse de R:

Orden Topológico: Sea (A, R) un CPO, (A, R') un CPO totalmente ordenado y $R \subseteq R'$. Entonces decimos que (A, R') es un ordenamiento topológico.

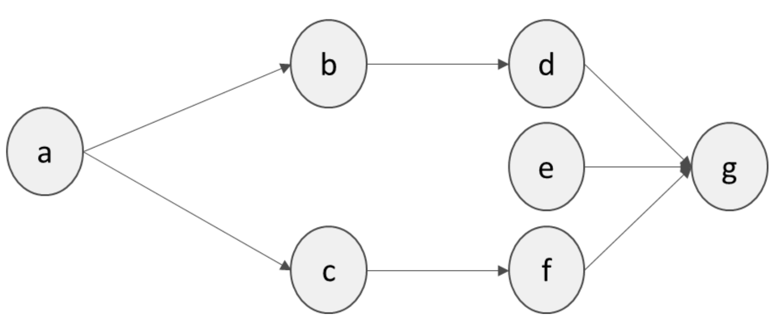
Algoritmo:

1. Determinar Minimal x_0 en A por R.
2. Retirar x_0 de A y retirar los arcos que inciden en x_0 por R.
3. Repetir el proceso con $(A - \{x_0\}, R')$. Donde R' es R menos los arcos que llegan o salen de x_0.
4. Revisar todos los elementos de A.

Ejemplo:

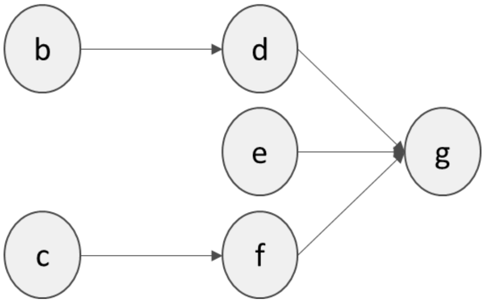
$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Diagrama de Hasse de R:

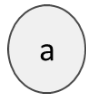


Proceso:

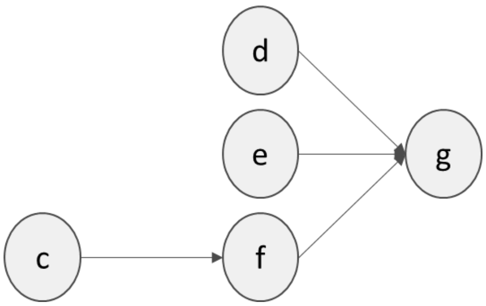
1- *R*



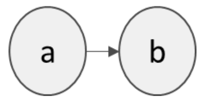
R'



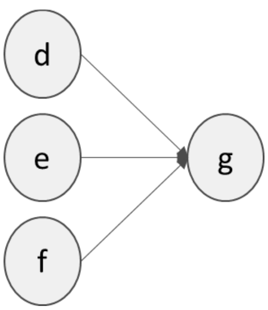
2- *R*



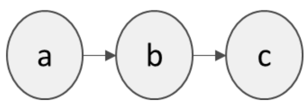
R'



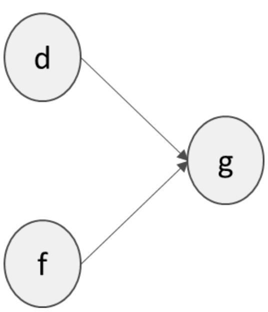
3- *R*



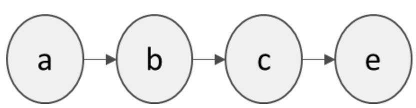
R'



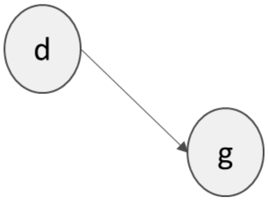
4- *R*



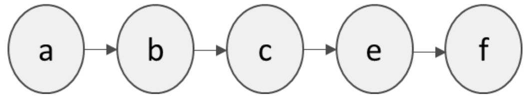
R'



5- R

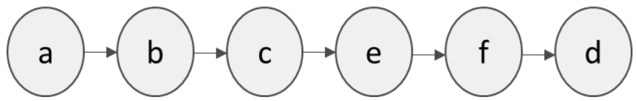


R'

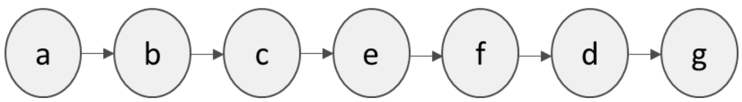


6- R

R'



7- R'



<u>Buen Orden:</u> Sea (A, R) un CPO. Entonces decimos que R es un buen orden en A si y solo si R es un orden total de a y todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

<u>Reticulado:</u> Sea (A, R) un CPO. Entonces decimos que (A, R) es un reticulado si y solo si $\forall x, y \in A\big(existe\ sup(\{x, y\}) \wedge existe\ inf(\{x, y\})\big)$

> <u>*Propiedad:*</u> Sea (A, R) un CPO tal que R ordena totalmente al conjunto A. Entonces (A, R) es un reticulado.

<u>Imagen:</u> $R(C) = \{y : \exists x(x \in C \wedge (x, y) \in R)\}$

<u>Pre-Imagen</u>: $R^{-1}(C) = \{x : \exists y(y \in C \wedge (x, y) \in R)\}$

<u>Números Naturales y Principio de Inducción</u>

<u>Sucesor de A:</u> $Suc(A) \Leftrightarrow A \cup \{A\}$

<u>Axioma de Infinitud:</u> Existe un conjunto formado por el vacío y el sucesor de sus elementos.

> <u>*Notación:*</u> Se denota es te conjunto como el conjunto de los números naturales. Se denota por 0 al conjunto vacío.
>
> <u>*Propiedades:*</u>
>
> - $\phi \in \mathbb{N}$
> - $Suc(\phi) \in \mathbb{N}$
> - $Suc\big(Suc(\phi)\big) \in \mathbb{N}$
> - $\forall n \in \mathbb{N}\big(n \in Suc(n)\big)$
> - $\forall n \in \mathbb{N}\big(n \subseteq Suc(n)\big)$
> - $\forall n \in \mathbb{N}(Suc(n) \neq \phi)$
> - $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \subseteq Suc(n) \Longrightarrow m \subseteq n \vee n \in m)$
> - $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \in n \Longrightarrow m \subseteq n)$

- $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \in n \Longrightarrow Suc(m) \subseteq n)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}\big(m = n \Leftrightarrow Suc(m) = Suc(n)\big)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \in n \Longrightarrow m \subset n)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \subset n \Longrightarrow m \in n)$

<u>Inducción Débil:</u> Dado P un conjunto ($P \subseteq \mathbb{N}$) tal que:

- $0 \in P$ (Paso base, es el primer número natural que no use $F \Longrightarrow T$ como demostración)
- $(n \in P \Longrightarrow Suc(n) \in P) \Longrightarrow P = \mathbb{N}$ (Para un n fijo) ($n \in P$ esla Hipótesis Inductiva, $Suc(n) \in P$ es la Tesis)

<u>Definición de ≤ para los Naturales:</u> $\leq = \{(x, y) : x \subseteq y\}$

<u>Propiedades:</u>

- $(\mathbb{N}, \leq)$ es un CPO
- $(m, n) \in \leq \Leftrightarrow m \leq n$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}\big((m, n) \in \leq \vee (n, m) \in \leq\big)$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}\big((m \leq n \wedge m \neq n) \vee m = n \vee (n \leq m \wedge m \neq n)\big)$ (Tricotomía de los Naturales)
- $m \leq n \wedge m \neq n \Leftrightarrow m < n$

<u>Suma en ℕ:</u> Dados $m, n \in \mathbb{N}$

- $n + m = n \ sii \ m = 0$
- $n + Suc(m) = Suc(n + m)$

<u>Propiedades:</u>

- $n + Suc(0) = Suc(n + 0) = Suc(n) = n + 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}(0 + n = n)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(m + n \in \mathbb{N})$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(n + Suc(m) = Suc(n) + m)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(m + n = n + m)$
- $\forall n, m, k \in \mathbb{N}(m + (n + k) = (m + n) + k)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}\big(m < n \Longrightarrow \exists p(p \in \mathbb{N} \wedge n = m + p)\big)$

<u>Multiplicación en ℕ:</u> Dados $m, n \in \mathbb{N}$

$n * m = 0 \ sii \ m = 0$

$n * Suc(m) = n + n * m$

<u>Propiedades:</u>

- $\forall m \in \mathbb{N}(0 * m = 0)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(n * m = m * n)$
- $\forall n, m, p \in \mathbb{N}(n * (m * p) = (n * m) * p)$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}(n * (m + p) = n * m + n * p)$

<u>Otras Definiciones Inductivas:</u>

<u>Números de Fibonacci:</u>

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n + 1) = F(n) + F(n - 1) \ para \ n \geq 1$

Concatenación: Supongamos que tenemos un alfabeto Σ, no vacío. Se define Σ^* (palabras en el alfabeto Σ) de la siguiente forma:

- $\Delta\ es\ la\ palabra\ vacía$
- $\Delta \in \Sigma^*$
- $x \in \Sigma^* \wedge a \in \Sigma \Longrightarrow x||a \in \Sigma^*$

Notación: $x||y = xy$ Ejemplo: $ca||sa = casa$

Propiedades:

- $\forall a \in \Sigma(a \in \Sigma^*)$
- $\forall a, b \in \Sigma(ab \in \Sigma^*)$

Reflejo: Dado un alfabeto Σ, no vacío.

- $a \in \Sigma \Longrightarrow refleja(a) = a$
- $xa \in \Sigma^* \Longrightarrow refleja(xa) = a||refleja(x)$

Principio de Inducción Completa: Dado $Q \subseteq \mathbb{N}$

- $0 \in Q$ (Paso base)
- $(\forall i(0 \leq i \leq n \Longrightarrow i \in Q) \Longrightarrow Suc(n) \in Q) \Longrightarrow Q = \mathbb{N}$ ($\forall i(0 \leq i \leq n \Longrightarrow i \in Q)$ esla Hipótesis Inductiva, $Suc(n) \in P$ es la Tesis)

Proposición: $Principio\ de\ Inducción\ Débil \Longrightarrow Principio\ de\ Inducción\ Completa$

Potencia de una Relación: Sea A un conjunto y R una relación sobre A.

- $R^n = I_A\ sii\ n = 0$
- $R^{Suc(n)} = R.R^n$

Lema: $R.I_A = R = I_A.R$

Lema: $A\ es\ un\ conjunto\ y\ R \subseteq AxA: \forall n \in \mathbb{N}\left(R^{Suc(n)} = R^n.R\right)$

Lema: Dado A un conjunto y R una relación sobre A.

- $\forall m, n \in \mathbb{N}(R^m.R^n = R^{m+n})$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}((R^m)^n = R^{m*n})$

Clausura de una Relación

Definición: Dados A y R tal que $R \subseteq AxA$ y P es una propiedad. Dada la clausura de R respecto a P sobre A es la relación "más pequeña" que contiene a R y posee la propiedad P en A.

- $R \subseteq p(R)$
- $p(R)\ satisface\ P\ en\ A$
- $\forall t(t\ satisface\ P\ en\ A \wedge R \subseteq t \Longrightarrow p(R) \subseteq t)$

Clausura Reflexiva: $r(R) = I_A \cup R$

- $R \subseteq r(R)$
- $r(R)\ es\ reflexiva\ en\ A$
- $\forall t(t\ es\ relfexiva\ en\ A \wedge R \subseteq t \Longrightarrow r(R) \subseteq t)$

Clausura Simétrica: $s(R) = R \cup R^{-1}$

- $R \subseteq s(R)$
- $s(R)\ es\ simétrica\ en\ A$
- $\forall t(t\ es\ simétrica\ en\ A \wedge R \subseteq t \Longrightarrow s(R) \subseteq t)$

Clausura Transitiva: $t(R) = \bigcup_{i\geq 1} R^i = \bigcup\left\{R^i : i \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

- $R \subseteq t(R)$
- $t(R)\ es\ transitiva\ en\ A$
- $\forall t(t\ es\ transitiva\ en\ A \wedge R \subseteq t \Longrightarrow t(R) \subseteq t)$

  Propiedades:
  - $(x,y) \in \bigcup_{i\geq 1} R^i \Leftrightarrow \exists i\left(i \in \mathbb{N} - \{0\} \wedge (x,y) \in R^i\right)$
  - $\bigcup_{i\geq 1}^{n} (R \cup I_A)^i = \bigcup_{i\geq 0}^{n} R^i$
  - $\left(\bigcup_{i\geq 1} R^i\right)^{-1} = \bigcup_{i\geq 1} \left(R^i\right)^{-1}$

  Notación: $\bigcup_{\mathrm{i}\geq 1} \mathrm{R}^{\mathrm{i}} = \bigcup_{\mathrm{i}\geq 1}^{\infty} \mathrm{R}^{\mathrm{i}}$

Proposiciones: Sea A un conjunto y R una relación sobre A.

- $r\left(s(R)\right) = s\left(r(R)\right)$
- $t\left(r(R)\right) = r\left(t(R)\right)$
- $s\left(t(R)\right) \subseteq t\left(s(R)\right)$

Tercer Parcial

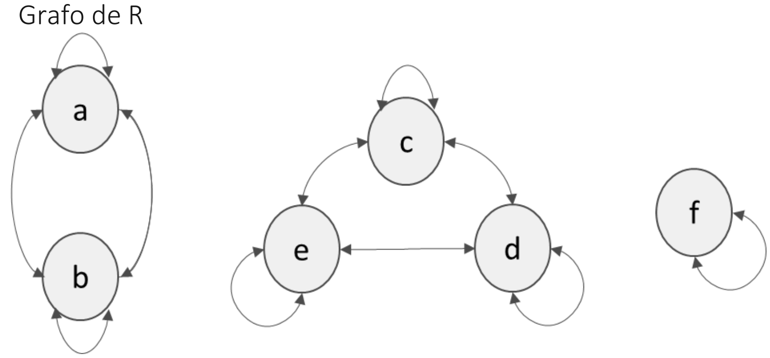
Relaciones de Equivalencia

Definición: Sea A un conjunto ($A \neq \phi$) y R una relación sobre A.

$R\ es\ una\ Relación\ de\ Equivalencia\ en\ A \Leftrightarrow R\ es\ reflexiva, simétrica\ y\ transitiva\ en\ A$

Ejemplo: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y R una Rel. De Equiv.

Grafo de R



Clase de Equivalencia: Sea $A \neq \phi \wedge R\ es\ una\ Rel.de\ Equiv.en\ A$

$[x]_R = \{\ y : y \in A \wedge (x,y) \in R\}$

Ejemplo: Usando R del ejemplo anterior

$[a]_R = [b]_R = \{a, b\}$, $[c]_R = \{c, d, e\}$

Proposiciones: Sea $A \neq \phi \wedge R\ es\ una\ Rel.de\ Equiv.en\ A$

- $\forall x \in A([x]_R \neq \phi)$

- $\forall x, y \in A([x]_R = [y]_R \Leftrightarrow (x, y) \in R)$
- $\forall x, y \in A([x]_R \cap [y]_R = \phi \vee [x]_R = [y]_R)$
- $A = \bigcup\{ [x]_R : x \in A\}$
- $A \neq \phi \Longrightarrow I_A\ es\ un\ orden\ parcial\ y\ una\ rel.de\ equiv.en\ A$
- $A \neq \phi \Longrightarrow AxA\ es\ una\ Relación\ de\ Equivalencia\ sobre\ A$

<u>Proposiciones:</u> Sea $A \neq \phi \wedge R, S\ son\ Relaciones\ de\ Equiv.en\ A.$

- $R \cup S\ no\ es\ Rel.De\ Equiv.sobre\ A\ ya\ que\ no\ es\ transitiva\ sobre\ A$
- $R \cap S\ es\ una\ Rel.De\ Equiv.sobre\ A$
- $R - S\ no\ es\ Rel.De\ Equiv.sobre\ A\ ya\ que\ no\ es\ reflexivo\ en\ A$
- $R.S\ no\ es\ Rel.De\ Equiv.sobre\ A\ ya\ que\ no\ es\ simétrico\ sobre\ A$

<u>Conjunto Cociente:</u> Sea $A \neq \phi \wedge R\ son\ Relaciones\ de\ Equiv.en\ A.$

$$\frac{A}{R} = \{[x]_R : x \in A\}$$

<u>Ejemplo:</u> $A = \{a, b, c\}$

- $R = I_A \Longrightarrow \frac{A}{R} = \{[a]_R, [b]_R, [c]_R\}$
- $R = AxA \Longrightarrow \frac{A}{R} = \{[a]_R\}$

<u>Propiedades:</u>

- $\frac{A}{R}\ es\ una\ familia$
- $A \neq \phi \Longrightarrow \frac{A}{R} \neq \phi$
- $\forall x \in \frac{A}{R}(x \neq \phi)$
- $\forall x, y \in \frac{A}{R}(x = y \vee x \cap y = \phi)$
- $\bigcup \frac{A}{R} = A$

<u>Congruencia n:</u> Sea el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y n es un entero positivo. (Otro nombre de esta relación es Congruencia Modulo n)

$$\equiv_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z} : n\ es\ divisor\ de\ x + (-y)\}$$

<u>Propiedades:</u>

- $\equiv_n\ \ es\ rel.de\ equiv.en\ \mathbb{Z}$
- $\frac{\mathbb{Z}}{\equiv_n} = \left\{[0]_{\equiv_n}, \dots, [n-1]_{\equiv_n}\right\}$ (Puede verse a cada clase de equivalencia como el conjunto de los números que al pasarles el módulo-n dan el mismo resultado)

<u>Ejemplo:</u> $\frac{\mathbb{Z}}{\equiv_2} = \left\{[0]_{\equiv_2}, [1]_{\equiv_2}\right\}$

<u>Matriz de Adyacencia de un Grafo Dirigido (A, R):</u> Si A es un conjunto con n elementos, digamos $a_1, a_2, \dots, a_n$, entonces la matriz de adyacencia de grupo (A, R) es una matriz cuadrada de dimensión nxn. Si los elementos de la matriz los denominamos $a_{i,j}$ entonces:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}(1 \leq i, j \leq n)\begin{pmatrix} a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R \\ a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \notin R \end{pmatrix}$$

Partición: Sea A un conjunto no vacío. Se dice que Π es una partición de A si y solo si:

- $\Pi\ es\ una\ familia\ no\ vacía$
- $A \neq \phi \Longrightarrow \Pi \neq \phi$
- $\forall x \in \Pi(x \neq \phi)$
- $\forall x, y \in \Pi(x = y \vee x \cap y = \phi)$
- $\bigcup\Pi = A$

  Corolario: $A \neq \phi \wedge R\ una\ rel.de\ equiv.en\ A \Longrightarrow \frac{A}{R}\ es\ una\ partición\ de\ A$

  Propiedades: Dado $A \neq \phi$ y Π_1, Π_2 particiones de A.

  - $\Pi_1 = \Pi_2 \Longrightarrow \Pi_1 \cup \Pi_2\ es\ una\ partición\ de\ A$
  - $\Pi_1 = \Pi_2 \Longrightarrow \Pi_1 \cap \Pi_2\ es\ una\ partición\ de\ A$
  - $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi \Longrightarrow \Pi_1 - \Pi_2\ es\ una\ partición\ de\ A$

Relación asociada a una partición: Dado $A \neq \phi$ y Π una partición de A.

$R_\Pi = \{(x, y) \in AxA : \exists B(B \in \Pi \wedge x \in B \wedge y \in B)\}$ (Tanto x como y se encuentran en el mismo "bloque" /elemento de la partición)

Propiedades:

- $R_\Pi \subseteq AxA$
- $R_\Pi\ es\ reflexiva\ en\ A$
- $R_\Pi\ es\ simétrica\ en\ A$
- $R_\Pi\ es\ transitiva\ en\ A$
- $R_\Pi\ es\ una\ Relación\ de\ Equivalencia\ en\ A$
- $\frac{A}{R_\Pi} = \left\{[x]_{R_\Pi} : x \in A\right\} = \Pi$

Refinamiento: Sea $A \neq \phi$ y Π_1, Π_2 particiones de A.

$$\Pi_1\ es\ un\ refinamiento\ de\ \Pi_2 \Longleftrightarrow \forall B \in \Pi_1\big(\exists W(W \in \Pi_2 \wedge B \subseteq W)\big) \wedge \Pi_1 \neq \Pi_2$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}, \Pi_1 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\big\},\ \Pi_2 = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}\big\}$

$\Pi_1\ es\ refinamiento\ de\ \Pi_2$

Proposición: Dado $A \neq \phi$ y Π_1, Π_2 particiones de A.

$$\Pi_1\ es\ un\ refinamiento\ de\ \Pi_2 \Longrightarrow R_{\Pi_1} \subseteq\ R_{\Pi_2}$$

Proposición: Dado $A \neq \phi$ y Π_1, Π_2 particiones de A.

$$R_{\Pi_1} \subset\ R_{\Pi_2} \Longrightarrow \Pi_1\ es\ un\ refinamiento\ de\ \Pi_2$$

Definición: Sea $A \neq \phi$. Se define $\widetilde{\Pi} = \{\Pi : \Pi\ es\ una\ partición\ de\ A\}$

Definición: Sea $A \neq \phi$. Se define

$$R_{\widetilde{\Pi}} = \left\{(\Pi, \Pi') \in \widetilde{\Pi}x\widetilde{\Pi} : \Pi\ es\ un\ refinamiento\ de\ \Pi' \vee \Pi = \Pi'\right\}$$

Propiedades:

- $R_{\widetilde{\Pi}} \subseteq \widetilde{\Pi}x\widetilde{\Pi}$
- $R_{\widetilde{\Pi}}\ es\ reflexiva\ en\ \widetilde{\Pi}$

- $R_{\widetilde{\Pi}}$ *es antisimétrica en* $\widetilde{\Pi}$
- $R_{\widetilde{\Pi}}$ *es transitiva en* $\widetilde{\Pi}$
- $R_{\widetilde{\Pi}}$ *es un orden parcial sobre* $\widetilde{\Pi}$
- $\frac{A}{I_A}$ *es el mínimo de* $R_{\widetilde{\Pi}}$
- $\frac{A}{AxA}$ *es el máximo de* $R_{\widetilde{\Pi}}$

Número Enteros:
Se define $R_{Ent} = \{((x,y),(z,w)) \in (\mathbb{N}x\mathbb{N})x(\mathbb{N}x\mathbb{N}) : x + w = y + z\}$
R_{Ent} *es una Relación de Equivalencia en* $\mathbb{N}x\mathbb{N}$
$[(0,0)]_{R_{Ent}} = \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$
Usando la propiedad $\forall n, m \in N(m < n \Longrightarrow \exists p(p \in N \wedge n = m + p))$
$[(m,n)]_{R_{Ent}} = [(0,p)]_{R_{Ent}}$ *con* $m < n$ *y* $p > 0$
$[(m,n)]_{R_{Ent}} = [(p,0)]_{R_{Ent}}$ *con* $n < m$ *y* $p > 0$
Se define $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}x\mathbb{N}}{R_{Ent}} = \{[(p,0)]_{R_{Ent}}, [(0,0)]_{R_{Ent}}, [(0,\mathrm{p})]_{R_{Ent}}\}$ *con* $p > 0$

Funciones

Definición: Sean A, B conjuntos cualesquiera y f una relación tal que $f \subseteq AxB$.

- f *es una función* $\Leftrightarrow \forall(x,y),(z,w)((x,y) \in f \wedge (z,w) \in f \wedge x = z \Longrightarrow y = w)$ (Unicidad de imagen)
- $D(f) = A \Leftrightarrow f$ *está totalemente definida en* A
- $D(f) \subset A \Leftrightarrow f$ *está parcialmente definida en* A

Notación: Si f es una función de A en B. Entonces será denotará $f: A \rightarrow B$. En general se utilizará esta notación cuando $D(f) = A$.

Ejemplo: $I_A = \{(x,y) : x \in A \wedge x = y\}$, I_A *es una función* de A en A y *está totalmente definida en* A.

Definición: Dado $f: A \rightarrow B$ y $(x,y) \in f$ decimos que $y = f(x)$.

Igualdad de Funciones: Sean A, B conjuntos cualesquiera y $g: A \rightarrow B, h: A \rightarrow B$. Entonces decimos que $g = h \Leftrightarrow \forall x \in A(g(x) = h(x))$. En caso de $D(g), D(h) \subset A$,
$h = g \Leftrightarrow D(g) = D(h) \wedge \forall x \in D(g)(g(x) = h(x))$.

Imagen y Pre-Imagen de un Conjunto: Sean A, B, C, D conjuntos cualesquiera tales que $C \subseteq A, D \subseteq B$ y $f: A \rightarrow B$, con $D(f) = A$. Entonces se definen: $f(C) = \{b : \exists a(a \in C \wedge b = f(a))\}$ (puede verse como tomar un subconjunto de A, de pre-imágenes, y conseguir todas las imágenes de cada elemento a través de f) y $f^{-1}(D) = \{a : f(a) \in D\}$ (El mismo concepto anterior, pero ahora con un conjunto de imágenes)

Extensión de Funciones: Sean A, B, C conjuntos cualesquiera tales que $C \subseteq A$ y $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow B$. Entonces decimos que f es una extensión de g en A si y solo si $f|(C)_{Izq} = g$.

Tipos de Funciones: Sean A, B conjuntos cualesquiera y $f: A \to B$. Decimos que $f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B$ si y solo si $\forall x, y \in A(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$. Decimos que $f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B$ si y solo si $\forall y \in B\left(\exists x\big(x \in A \wedge y = f(x)\big)\right)$. Decimos que $f\ es\ biyectiva\ de\ A\ en\ B$ si y solo si $f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B \wedge f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B$.

Función Constante: Sean A, B conjuntos cualesquiera, $f: A \to B$ y c un punto fijo en B. Se define la función constante como $\forall x \in A(f(x) = c)$. En general $f\ no\ es\ sobreyectiva\ ni\ inyectiva$. Si $B = \{c\} \Longrightarrow f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B$ y si $A = \{x\} \Longrightarrow f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B$.

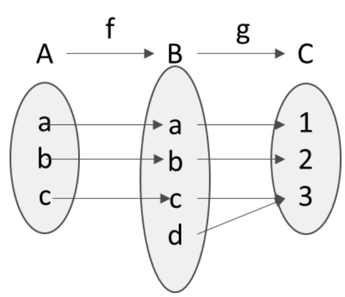
Composición de Funciones: Sean A, B, C conjuntos cualesquiera, $f: A \to B$ y $g: B \to C$. Entonces se define la composición de g con f como $g_o f = f.g$

Propiedades:

- $g_o f\ es\ una\ función\ de\ A\ en\ C, g_o f: A \to C$
- $D(g_o f) = A$
- $f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B\ y\ g\ es\ inyectiva\ de\ B\ en\ C \Longrightarrow g_o f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ C$
- $f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B\ y\ g\ es\ sobreyectiva\ de\ B\ en\ C \Longrightarrow g_o f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ C$
- $f\ es\ biyectiva\ de\ A\ en\ B\ y\ g\ es\ biyectiva\ de\ B\ en\ C \Longrightarrow g_o f\ es\ biyectiva\ de\ A\ en\ C$
- $g_o f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ C \Longrightarrow f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B$
- $g_o f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ C \Longrightarrow g\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B$
- $g_o f\ es\ biyectiva\ de\ A\ en\ C \Longrightarrow f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B \wedge g\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B$

Contraejemplos:

- $¿\, g_o f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ C \Longrightarrow g\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B$? *En general no. Contraejemplo:* $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}\ \ y\ \ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 \therefore g_o f\ es\ inyectiva\ pero\ g\ no\ es\ inyectiva$
- $¿\, g_o f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ C \Longrightarrow f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B$? *En general no. Contraejemplo:*

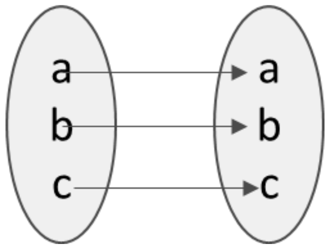


Representación de Funciones: Se pueden representar como Conjunto de Pares, Diagramas de Venn y de forma Matricial.

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}\ y\ f = I_A$

$f: A \to A$

Diagrama de Venn   Forma Matricial



$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

<u>Inversas</u>: Sean A, B conjuntos cualesquiera y $f: A \to B$. Entonces:

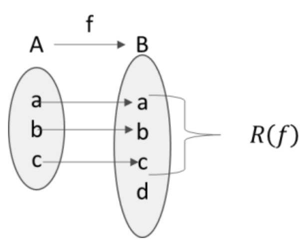
- $f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B \Longrightarrow f^{-1}\ es\ una\ función\ de\ R(f)\ en\ A \wedge f^{-1}\ \ es\ biyectiva\ de\ R(f)\ en\ A \wedge {f^{-1}}_o f = I_A$
- $f\ es\ biyectiva\ de\ A\ en\ B \Longrightarrow f^{-1}\ es\ una\ función\ de\ B\ en\ A \wedge f^{-1}\ \ es\ biyectiva\ de\ B\ en\ A \wedge {f^{-1}}_o f = I_A \wedge f_o f^{-1} = I_B$

<u>Inversas Unilaterales:</u>

- $Sea\ f: A \to B.$ Entonces se dice que $g: B \to A\ e$s una inversa izquierda de f si y solo si $g_o f = I_A$.
- $Sea\ f: A \to B.$ Entonces se dice que $g: B \to A\ e$s una inversa derecha de f si y solo si $f_o g = I_B$.

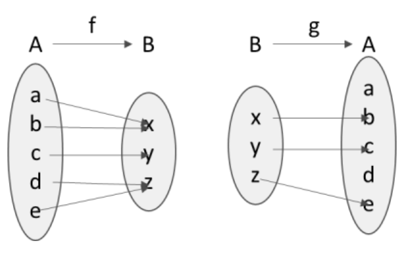
<u>Ejemplos:</u>

a)



$f^{-1}: R(f) \to A.$ Se define $g, g = f^{-1} \cup \{(d, c)\}$.
Entonces $g: B \to A \wedge g_o f = I_A$. Por lo tanto $g\ es\ una\ inversa\ izquierda\ de\ f.$

b)



$g: B \to A \wedge f_o g = I_B$. Por lo tanto $g\ es\ una\ inversa\ derecha\ de\ f.$

<u>Inversa Bilateral:</u> $Sea\ f: A \to B.$ Entonces se dice que $g: B \to A\ e$s una inversa bilateral de f si y solo si $f_o g = I_B \wedge g_o f = I_A$. Tradicionalmente se conoce a la Inversa Bilateral como la “Inversa”.

Proposiciones de Inversas: Sean A, B conjuntos cualesquiera y $f: A \to B$. Entonces:

- $f\ es\ inyectiva\ de\ A\ en\ B \Longrightarrow f\ tiene\ inversa\ izquierda$
- $f\ es\ sobreyectiva\ de\ A\ en\ B \Longrightarrow f\ tiene\ inversa\ derecha$
- $f\ es\ biyectiva\ de\ A\ en\ B \Longrightarrow f\ tiene\ inversa\ bilateral$

Finitud, Conjuntos Contables y Cardinalidad

Intervalo Natural: Sea n un número natural $n \geq 1$ entonces se define
$[1, n] = \{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq n\}$

Conjunto Finito: Sea A un conjunto entonces decimos que $A\ es\ finito$ si y solo si A es vacío $(A = \phi)$ o $\exists n\big(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \wedge \exists g(g: [1, n] \to A, biyectiva)\big)$

Propiedades:

- $\phi\ es\ finito$
- $\forall n(n \geq 1)([1, n]\ es\ finito)$
- $\forall n(n \geq 1)(\forall A(A \subseteq [1, n] \Longrightarrow A\ es\ finito))$
- $\forall A, B(B \subseteq A \wedge A\ es\ finito \Longrightarrow B\ es\ finito)$ *(Todo subconjunto de un conjunto finito es finito)*
- $\forall A, B(A\ es\ finito \Longrightarrow A \cap B\ es\ finito)$
- $\forall A, B(A\ es\ finito \Longrightarrow A - B\ es\ finito)$
- $\forall A, B(A\ es\ finito \wedge B\ es\ finito \Longrightarrow A \cup B\ es\ finito)$
- $\forall A, B(A\ es\ finito \wedge B\ es\ finito \Longrightarrow AxB\ es\ finito)$
- *Dado* $F = \{A_i : i \in \mathbb{N} \wedge A_i\ es\ finito\}$ *:*
  - $\forall n \in \mathbb{N}(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\ \ es\ finito)$ *(La unión finita de conjuntos finitos es finita)*
  - $\forall n \in \mathbb{N}(X_{i=0}^{n} A_i\ es\ finito)$*(El producto cartesiano finito de conjuntos finitos es finito)*
- Para todo intervalo $[1, n]$ $(n \geq 1)$ y toda $f: [1, n] \to \mathbb{N}$. Entonces $R(f)$ tiene máximo.
- Sean A, B conjuntos cualesquiera y $g: A \to B, biyectiva$. Entonces
  $A\ es\ finito \Longrightarrow B\ es\ finito$
- $\forall A(A\ es\ finito \Longrightarrow \rho(A)\ es\ finito)$

Conjunto Infinito: Sea A un conjunto cualquiera. $A\ es\ infinito \Longleftrightarrow A\ no\ es\ finito$

Propiedades:

- $\mathbb{N}\ es\ infinito$
- $\forall A(A\ es\ infinito \Longrightarrow A \neq \phi)$
- $\forall A, B(A\ es\ infinito \wedge A \subseteq B \Longrightarrow B\ es\ infinito)$ (Si un conjunto tiene un subconjunto infinito, entonces ese conjunto es infinito)
- $\mathbb{Z}\ es\ infinito$
- $\mathbb{Q}\ es\ infinito$
- $\mathbb{R}\ es\ infinito$
- Sean A, B conjuntos cualesquiera y $g: A \to B, biyectiva$. Entonces
  $A\ es\ infinito \Longrightarrow B\ es\ infinito$

Conjunto Contable: Sea A un conjunto cualquiera. Entonces decimos que $A\ es\ contable$ si y solo si $A\ es\ finito$ (Contable Finito) o $\exists g(g: \mathbb{N} \to A, biyectiva)$(Contable Infinito).

Propiedades:

- $\mathbb{N}\ es\ contable$
- $\mathbb{Z}\ es\ contable$
- $\mathbb{Q}\ es\ contable$
- $\forall A(A \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow A\ es\ contable)$
- $\forall A, B(A\ es\ contable \wedge B \subseteq A \Longrightarrow B\ es\ contable)$ *(Todo subconjunto de un conjunto contable es contable)*
- *Dado* $F = \{A_i : i \in \mathbb{N} \wedge A_i\ es\ contable\}$ *:*
  - $\forall n \in \mathbb{N}(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\ \ es\ contable)$ *(La unión contable de conjuntos contables es contable)*
  - $\forall n \in \mathbb{N}(X_{i=0}^{n} A_i\ es\ contable)$*(El producto cartesiano contable de conjuntos contables es contable)*

Teorema de la Triple Equivalencia: Dado A un conjunto distinto de vacío:

- $A\ es\ contable$
- $\exists f(f: A \to \mathbb{N}, inyectiva)$
- $\exists g(g: \mathbb{N} \to A, sobreyectiva)$

Cardinalidad: Dados A, B conjuntos cualesquiera, decimos que A y B tienen igual Cardinalidad si y solo si existe una biyección entra A y B ($\exists f(f: A \to B, biyectiva)$). La Cardinalidad se denota por $|\circ|$, es decir, $cardinalidad\ de\ A$ se escribe $|A|$.

Ejemplo: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} - \{0\}| = |\mathbb{Z}| = \lambda_0$

Proposición: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}| = |\mathbb{Q}| + |\mathbb{I}| = \lambda_0 + |\mathbb{I}| = |\mathbb{I}|$

Bibliografía

Clases de la Profesora Xiomara Contreras.

Elementos de Teoría Axiomática de Conjuntos de Vicente Yriarte.

Notas

Elaborado por Christian Alexander Oliveros Labrador, Cohorte 13. Ing. Computación.

Página web: oliveroschristian.wordpress.com

Actualizada: 8 de abril de 2016. El orden de los temas es basado en el cronograma del curso Abril-Julio 2015 (Enero-Marzo si no se cuenta el retraso).

Para cualquier corrección o sugerencia enviar un correo a *christianol_01@hotmail.com*. Por favor añadir página, el error y lo que debería ser.

Agradecimientos a César Silva por correcciones de errores.